Sur certains théorèmes de J. von Neumann concernant les ensembles spectraux.

Par CIPRIAN FOIAŞ à Bucarest (Roumanie).

La notion d'ensemble spectral d'une transformation linéaire bornée d'un espace de Hilbert, introduite par J. v. NEUMANN ([2]), a aussi sens dans le cas général d'une algèbre de Banach A quelconque, à élément unité e. Nous dirons, d'après v. NEUMANN, qu'un ensemble de nombres complexes S est un ensemble spectral de $x \in A$ si, quel que soit la fonction rationnelle $r(\lambda)$ satisfaisant à l'inégalité $|r(\lambda)| \leqq 1$ pour $\lambda \in S$, $r(x)$ existe et on a $||r(x)|| \leqq 1$. La question que nous nous posons c'est de caractériser les algèbres A, pour lesquelles les théorèmes de v. NEUMANN sur les ensembles spectraux sont valables.

Dans le paragraphe 1 nous envisagerons des algèbres de Banach A *involutives* ([1], § 4, 2), tandis que dans le paragraphe 2 il s'agira de l'algèbre $L(X)$ des opérateurs bornés d'un espace de Banach X.

1. La proposition suivante est valable pour une algèbre de Banach quelconque A, à élément unité.

Proposition (N_1). *Si le demi-plan* $\mathrm{Re}\lambda \geqq 0$ *est un ensemble spectral de* x, *on a* $\mathrm{Re} f(x) \geqq 0$ *pour toute forme linéaire positive* f *sur* A ([1], § 6, 1 et 2).

Démonstration. Pour $r > 0$ on a $\left|\frac{r-\lambda}{r+\lambda}\right| \leqq 1$ dans le demi-plan $\mathrm{Re}\lambda \geqq 0$, et par conséquent $||(re-x)(re+x)^{-1}|| \leqq 1$; comme d'autre part $(re-x)(re+x)^{-1} = e - \frac{2x}{r} + \frac{2x^2}{r}(re+x)^{-1}$ on a, pour toute forme linéaire positive f sur A:

$$(1)\quad f(e) - \frac{2}{r}\mathrm{Re} f(x) + \frac{2}{r}\mathrm{Re} f[x^2(re+x)^{-1}] \leqq |f[(re-x)(re+x)^{-1}]| \leqq f(e),$$

où l'on a utilisé le fait que la norme de f est égale à $f(e)$ ([1], § 6, 2).

Mais $\left|\frac{r}{r+\lambda}\right| \leqq 1$ dans le demi-plan droit, donc $\|(re+x)^{-1}\| \leqq \frac{1}{r}$; on a

$$\operatorname{Re} f[x^2(re+x)^{-1}] \geqq -|f[x^2(re+x)^{-1}]| \geqq -f(e)\frac{\|x\|^2}{r};$$

la relation (1) donne

$$f(e)-\frac{2}{r}\operatorname{Re} f(x)-\frac{2\|x\|^2}{r^2}f(e) \leqq f(e),$$

d'où

$$-\frac{f(e)\|x\|^2}{r} \leqq \operatorname{Re} f(x).$$

Faisant tendre r vers l'infini il en résulte que $\operatorname{Re} f(x) \geqq 0$, q. e. d.

Dans le cas de l'algèbre $L(E)$ des transformations linéaires bornées d'un espace de Hilbert E, la proposition (N_1) admet une réciproque ([2], th. 52); dans le cas général il y correspondrait la

Proposition (N_2). *Si pour toute forme linéaire positive f sur A on a $\operatorname{Re} f(x) \geqq 0$, le demi-plan $\operatorname{Re}\lambda \geqq 0$ est un ensemble spectral de x.*

Dans le cas de l'algèbre $L(E)$, les deux propositions (N_1), (N_2) se réduisent au théorème 5.2 de v. NEUMANN ([2]), équivalent au théorème principal 4.2.

Notre problème est de caractériser les algèbres A, dans lesquelles est vraie la proposition (N_2).

Théorème 1. *Si dans une algèbre de Banach involutive A, à élément unité, la proposition (N_2) est toujours vraie, l'algèbre A est isomorphe et isométrique à une sous-algèbre fermée de l'algèbre des transformations linéaires bornées d'un espace de Hilbert.*

Nous démontrerons ce théorème en utilisant le théorème de représentation des algèbres involutives réduites, avec norme régulière, donné par GELFAND et NEUMARK ([1], § 8, 3, th. 1). Dans ce but nous donnerons quelques propositions simples sur les algèbres de Banach A involutives, à élément unité et dans lesquelles la proposition (N_2) est vraie. (Il sera utile de désigner par F l'ensemble des formes linéaires positives sur A.)

Lemme 1. *L'algèbre A est réduite, c'est-à-dire que si $f(x^*x)=0$ pour tout $f \in F$, on a $x=0$.*

Démonstration. Si $f \in F$, $f(x^*x)=0$ entraîne $f(x)=0$, donc is $f(x^*x)=0$ pour tout $f \in F$, on a $f(x)=0$, donc aussi $f(e^{-i\theta}x)=0$, pour tout θ réel et pour tout $f \in F$. En vertu de la proposition (N_2), $\operatorname{Re}\lambda \geqq 0$ est alors un ensemble spectral de $e^{-i\theta}x$, d'où il s'ensuit évidemment que $\mathrm{Re}\, e^{i\theta}\lambda \geqq 0$ est un ensemble spectral de x. Il résulte que pour tout $\lambda_0 \neq 0$ on a $|\lambda_0(\lambda_0-\lambda)^{-1}| \leqq 1$ sur l'un des ensembles spectraux de x; donc $(\lambda_0 e-x)^{-1}$ existe et on a $||(\lambda_0 e-x)^{-1}|| \leqq |\lambda_0|^{-1}$, ce qui montre d'abord que x est quasinilpotent; la dernière inégalité et la formule

$$x = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\lambda|=\varrho} \lambda(\lambda e - x)^{-1} d\lambda \qquad (\varrho > 0)$$

donnent immédiatement $x=0$, q. e. d.

Lemme 2. *Si* $(e+x)^{-1}$ *existe et si* $u=(e-x)(e+x)^{-1}$, *le fait que* $\mathrm{Re} f(x) \geqq 0$ *pour tout* $f \in F$, *est équivalent au fait que* $f(e) \geqq f(u^* u)$ *pour tout* $f \in F$.

Démonstration. Nous ferons usage de la formule évidente

$$f[(e+x)^*(e+x)] - f[(e-x)^*(e-x)] = 4\,\mathrm{Re} f(x). \tag{2}$$

Supposons que $(e+x)^{-1}$ existe et que $\mathrm{Re} f(x) \geqq 0$ pour tout $f \in F$. Alors, en posant $f_1(z) = f[(e+x^*)^{-1} z (e+x)^{-1}]$ pour un $f \in F$, on aura $f_1 \in F$ et par conséquent $\mathrm{Re} f_1(x) \geqq 0$; en appliquant (2) à $f_1(x)$ au lieu de $f(x)$, il resulte que $f(e) - f(u^* u) = 4\,\mathrm{Re} f_1(x) \geqq 0$ donc $f(e) \geqq f(u^* u)$. Supposons inversement que la condition $f(e) \geqq f(u^* u)$ est vérifiée pour tout $f \in F$. Puisque $f_2(z) = f[(e+x)^* z (e+x)] \in F$, on aura aussi $f_2(e) - f_2(u^* u) \geqq 0$, d'où il s'ensuit, en faisant de nouveau usage de (2), que $\mathrm{Re} f(x) \geqq 0$, q. e. d.

Lemme 3. *Soit u un élément de A pour lequel les deux conditions suivantes sont vérifiées: (i) $f(e) \geqq f(u^* u)$ pour tout $f \in F$, (ii) $(e+u)^{-1}$ existe. On a alors $||u|| \leqq 1$.*

Démonstration. Si l'on considère $x = (e-u)(e+u)^{-1}$, $(e+x)^{-1}$ existe car $e+x = 2(e+u)^{-1}$. Du lemme 2 il résulte que $\mathrm{Re} f(x) \geqq 0$ pour tout $f \in F$, donc, en vertu de la proposition (N_2), le demi-plan $\mathrm{Re}\,\lambda \geqq 0$ est un ensemble spectral de x. Par conséquent $||u|| = ||(e-x)(e+x)^{-1}|| \leqq 1$, q. e. d.

Pour démontrer le théorème énoncé, nous utilisons un théorème de représentation dû à Gelfand et Neumark ([1], § 8, 3, th. 1). D'après ce théorème, toute algèbre de Banach involutive et réduite est isomorphe à une sous-algèbre de transformations linéaires bornées d'un espace de Hilbert. La construction, de Gelfand et Neumark, de cette isomorphie, a la propriété que si $x \to T_x$ est la représentation isomorphique de l'algèbre, on a $||T_x|| = \sqrt{\sup f(x^* x)}$, le supremum étant pris par rapport à toutes les formes $f \in F$, $f(e) \leqq 1$ ([1], § 8, 3, th. 2). En appliquant ces résultats à notre cas, on obtient que l'algèbre A est isomorphe à une sous-algèbre des transformations linéaires bornées d'un espace de Hilbert, et que si $x \to T_x$ est cette isomorphie, on a $\|T_x\| = \sqrt{\sup f(x^* x)}$, $f \in F$, $f(e) \leqq 1$. En posant $\|x\|_1 = \|T_x\|$, on voit sans peine que $\|\cdot\|_1$ est une norme sur A et que $\|x\|_1 = \|x^*\|_1$; ce dernier fait résulte immédiatement de la relation $T_{x^*} = (T_x)^*$. En plus, si l'on utilise le fait que la norme d'une forme linéaire positive f sur A est égale à $f(e)$, on obtient que $\|x\|_1 \leqq \|x\|$. Nous pouvons maintenant passer au

Lemme 4. *Pour tout élément autoadjoint* x $(x^* = x)$ *on a* $\|x\|_1 = \|x\|$.

Démonstration. Il suffit de montrer que $\|x\| \leqq \|x\|_1$. Dans ce but, remarquons que si $x = x^*$, $f(x)$ est réelle, quelle que soit la forme $f \in F$; on a alors $\operatorname{Re} f(ix) = \operatorname{Re} if(x) = 0$ pour tout $f \in F$. D'après la proposition (N_2), le demi-plan $\operatorname{Re} \lambda \geqq 0$ est un ensemble spectral de ix, donc l'inégalité $\left|\frac{1}{1+\lambda}\right| \leqq 1$, vraie dans tout le demi-plan $\operatorname{Re} \lambda \geqq 0$, entraîne aussi l'existence de $(e+ix)^{-1}$. Si $\|x\|_1 \leqq 1$, il s'ensuit de la définition de $\|\cdot\|_1$ que $f[(ix)^* ix] = f(x^* x) \leqq f(e)$, pour toute forme $f \in F$. On voit donc que si $\|x\|_1 \leqq 1$, l'élément $u = ix$ vérifie les conditions du lemme 3; d'après ce lemme on a alors $\|x\| = \|ix\| \leqq 1$. Nous avons ainsi obtenu que pour les éléments autoadjoints l'inégalité $\|x\|_1 \leqq 1$ entraîne $\|x\| \leqq 1$. En appliquant ce résultat à $x/\|x\|_1$ on obtient que $\|x\| \leqq \|x\|_1$, q. e. d.

Reprenons la démonstration du théorème: On voit que l'algèbre A est complète aussi par rapport à la norme $\|\cdot\|_1$. Cela résulte immédiatement du fait que pour tout $x \in A$ on a:

$$\|x\|_1 \leqq \|x\| \leqq \left\|\frac{x+x^*}{2} + i\frac{x-x^*}{2i}\right\| \leqq \left\|\frac{x+x^*}{2}\right\| + \left\|\frac{x-x^*}{2i}\right\| =$$
$$= \left\|\frac{x+x^*}{2}\right\|_1 + \left\|\frac{x-x^*}{2i}\right\|_1 \leqq 2\|x\|_1$$

(on a utilisé d'abord le lemme 4, puis le fait que A est une algèbre normée involutive par rapport à la norme $\|\cdot\|_1$).

Soit maintenant $x \in A$, $\|x\|_1 < 1$; comme A est une algèbre de Banach par rapport à $\|\cdot\|_1$, l'existence de $(e+x)^{-1}$ est assurée; d'autre part l'inégalité $\|x\|_1 < 1$ entraîne $f(x^* x) \leqq f(e)$ quelle que soit la forme $f \in F$, donc x satisfait aux conditions du lemme 3, d'où il résulte que $\|x\| \leqq 1$. Le fait que $\|x\|_1 = \|x\|$ est alors évident car si l'on avait $\|x\|_1 < \|x\|$ pour un $x \in A$, on aboutirait, en choisissant ϱ tel que $\|x\|_1 < \varrho < \|x\|$, à la contradiction cherchée: $\|x/\varrho\|_1 < 1$, $\|x/\varrho\| > 1$. Donc $\|x\| = \|x\|_1 = \|T_x\|$ pour tout $x \in A$, c'est-à-dire que la représentation $x \to T_x$ est aussi isométrique, ce qui achève la démonstration.

2. Dans ce qui suit, X sera un espace de Banach complexe quelconque, X^* son espace dual.

Théorème. 2. *Si le disque unité $|z| \leqq 1$ est un ensemble spectral de tout opérateur T de X tel que $\|T\| \leqq 1$, X est nécessairement un espace de Hilbert.*

Démonstration. Soient $x_0^* \in X^*$, $x_0 \in X$, et supposons que $\|x_0^*\| \|x_0\| \leqq 1$. Alors si $Tx = x_0^*(x)x_0$ on a $\|T\| \leqq 1$, donc (en considérant la fonction $r(\lambda) = (\lambda + \alpha)(1 + \bar{\alpha}\lambda)^{-1}$, $|\alpha| < 1$)

$$\|(T + \alpha I)(I + \bar{\alpha}T)^{-1}x\| \leqq \|x\|, \quad x \in X,$$

ce qui est équivalent à

$$\|(T + \alpha I)x\| \leqq \|(I + \bar{\alpha}T)x\|, \quad x \in X.$$

Dans notre cas particulier cela signifie que

$$\|x_0^*(x)x_0 + \alpha x\| \leqq \|x + \bar{\alpha}x_0^*(x)x_0\|. \tag{3}$$

Soient maintenant $x, y \in X$, $\|x\| \geqq \|y\| > 0$. Il existe un $x_0^* \in X^*$ tel que $\|x_0^*\| = \|x\|^{-1}$ et $x_0^*(x) = 1$. Si l'on pose $x_0 = y$, on a $\|x_0^*\| \|x_0\| = \|x\|^{-1}\|y\| \leqq 1$, donc, d'après (3),

$$\|y + \alpha x\| \leqq \|x + \bar{\alpha}y\| \qquad (|\alpha| < 1). \tag{4}$$

Cette relation reste évidemment vraie aussi pour $|\alpha| = 1$.

Supposons maintenant que $\|x\| = \|y\|$. Alors, en changeant les rôles de x et y, et en remplaçant α par $\bar{\alpha}$, on obtient de (4) l'inégalité opposée, donc on a

$$\|x + \bar{\alpha}y\| = \|y + \alpha x\| \qquad (|\alpha| \leqq 1). \tag{5}$$

Si $|\alpha| > 1$, on a pour $\beta = 1/\bar{\alpha}$:

$$\|x + \bar{\alpha}y\| = |\alpha| \|\beta x + y\| = |\alpha| \|x + \bar{\beta}y\| = \|\alpha x + y\|,$$

donc (5) reste vraie pour *tout* α. En posant $\alpha = p/q$, p et q réels, il résulte

$$\|py + qx\| = |q| \left\| \frac{p}{q} y + x \right\| = |q| \left\| y + \frac{p}{q} x \right\| = \|qy + px\|.$$

Donc, si $\|x\| = \|y\| > 0$, on a pour tous p, q réels

$$\|px + qy\| = \|qx + py\|,$$

relation qui est d'ailleurs évidemment vraie aussi pour $x = y = 0$. Or, d'après un théorème de FICKEN [3], cette relation est caractéristique pour l'espace de Hilbert. Donc X est un espace de Hilbert, q. e. d.

Bibliographie.

[1] M. A. Наймарк, Кольца с инволюцией, Успехи Матем. Наук, III/5 (1948), 52—145.

[2] J. v. Neumann, Eine Spektraltheorie für allgemeine Operatoren eines unitären Raumes, *Math. Nachrichten*, 4 (1951), 258—281.

[3] F. A. Ficken, Note on the existence of scalar products in normed linear spaces, *Annals of Math.*, 45 (1946), 362—366.

(Reçu le 2 janvier et le 11 avril 1957.)